

文章编号: 1007-4627(2026)01-0040-09

基于投影角度均匀化的四极磁铁扫描横向相空间测量误差最小化研究

马炳慧^{1,2}, 黄骏仁^{1,2,3}, 杜雨^{1,2}, 刘力文^{1,2}

(1. 中国科学院近代物理研究所, 兰州 730000;

2. 中国科学院大学核科学与技术学院, 北京 100049;

3. 先进能源科学与技术广东省实验室, 广东惠州 516000)

摘要: 在束流诊断中, 准确获得相空间的分布信息对于束流预测、调控及理解其动力学行为具有关键意义。其中四极磁铁扫描是最常用的横向相空间重构技术, 其基本原理是在不同聚焦强度下获取一系列束流剖面, 并据此反推上游位置的相空间分布信息。然而, 该方法在实际应用中测量噪声、磁场误差、元件非线性及安装不确定性等多种因素会对测量结果造成扰动, 当扫描参数选择不当时, 扰动对重构结果的影响尤为显著, 从而影响后续束流调控与物理判断。针对上述问题, 本研究从线性代数与几何投影视角系统分析误差对测量的影响, 提出了一种可有效量化误差敏感度的参数优化方法。通过对不同聚焦条件下的误差放大特性进行对比, 我们建立了最小化误差的参数选择准则, 使反演得到的初始相空间分布更加精确和准确。

关键词: 四极磁铁扫描; 误差最小化; 条件数; 束流诊断; 横向相空间测量

中图分类号: TL503.6 **文献标志码:** A **DOI:** 10.11804/NuclPhysRev.37.01.40

引言

发射度是描述束流在相空间中占据体积的重要物理量, 是表征束流品质与传输性能的核心参数之一。对发射度和 Twiss 参数的精确测量对于加速器光学设计、束流调试以及相空间操控具有重要意义^[1]。因此, 发展稳定、可靠的束流横向发射度测量方法一直是束流诊断领域的研究重点。

现有的离子束横向发射度测量方法大致可分为直接测量法与间接测量法。直接测量法包括狭缝扫描^[2]、丝扫描^[3]、以及孔屏法 (Pepper Pot)^[4]。狭缝/缝丝测量法可扫描相空间的所有信息, 但其耗时较长且测量时限制条件较多^[5]。孔屏法虽有测量耗时短, 装置简单等优势, 但其采样获取的相空间信息不连续, 测量精度受孔径大小和孔密度的限制^[6]。而间接测量法避免了这两种问题, 该方法在测量获得多个低维分布后, 采用一些重构算法对束流进行重构以获得束流分布信息。

其中, 基于四极磁铁扫描的横向发射度测量方法因其装置结构相对简单、易于集成于现有束线而被广泛应用^[7]。该方法通过改变四极磁铁的聚焦强度, 在下游测量位置多次获取束流空间剖面, 从而反推上游位置的横向

相空间信息^[8]。具体的束流剖面测量可由狭缝扫描、丝扫描等手段完成。在传输系统为线性系统的条件下, 横向相空间的重构过程可形式化表示为线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ^[9]。其中, \mathbf{b} 表示测量端获得的束流剖面信息, \mathbf{x} 为待求解的初始相空间参数, 而矩阵 \mathbf{A} 则由四极磁铁聚焦强度及束线传输结构共同决定。

然而, 通过四极磁铁扫描重构得到的横向相空间信息不可避免地受到多种误差源的影响。测量端噪声、探测系统分辨率等因素会给 \mathbf{b} 带来误差, 而四极磁铁场误差、元件非线性效应及安装不确定性等则会导致系数矩阵 \mathbf{A} 的偏差^[10]。这些误差在反演过程中可能被放大, 从而影响初始束流参数及发射度的重构精度。

值得注意的是, 束流矩阵重构结果对测量误差和传输条件的不确定性的敏感程度在很大程度上取决于所选取的四极磁铁扫描参数, 即系数矩阵 \mathbf{A} 的数值特性。由于实际测量中可获取的剖面数量有限, 若扫描参数选取不合理, 方程组将呈现出较强的病态性, 使得重构结果对噪声和扰动高度敏感, 导致初始相空间分布显著偏离真实情况^[11]。相反, 合理设计扫描参数可有效降低系统对误差的敏感性, 提高重构结果的精确度。

因此, 对四极磁铁扫描参数的优化不仅是提高横向发射度测量精度的关键问题, 也是保障束流诊断结果可靠性的重要前提。围绕扫描参数与误差传播特性之间的关系开展系统研究, 对于改进现有发射度测量方法具有重要的理论意义与实际价值。

本文首先介绍利用四极磁铁扫描法进行横向相空间

收稿日期: 2026-03-19; 修改日期: 2026-03-19

基金项目: 国家自然科学基金-基于 CAFE 的高功率超导直线加速器长期运行稳定性关键问题研究 (U22A20261)

作者简介: 马炳慧 (2002-), 女, 河北省邯郸市人, 硕士研究生, 粒子物理与原子核物理专业; E-mail: mabinghui@impcas.ac.cn

通信作者: E-mail: wong@impcas.ac.cn

测量的基本原理; 随后从线性方程组的误差传播出发, 引入条件数作为量化误差敏感度的指标; 在此基础上, 进一步从几何的角度建立四极磁铁聚焦参数、投影角度与矩阵条件数之间的关系, 并在假设二维横向相空间分布为圆的理想情况下给出均匀投影角度对应低条件数的结论, 并通过坐标转换及减小伸缩因子离散指标两个步骤将结论推广至一般束团。

1 四极磁铁扫描测量原理

四极磁铁扫描法是加速器束流诊断中应用最为广泛的横向相空间测量技术之一, 常用于重构束流在某一上游参考位置处的二阶矩信息, 并由此计算横向发射度。该方法通过改变上游与下游之间四极磁铁的聚焦强度, 使束流在下游测量位置处经过不同的线性传输, 从而获得一系列束流剖面测量结果, 并据此反推出上游束流的相空间分布信息。

以水平方向为例, 在理想线性传输近似下, 待测位置(i) 和实际测量位置(f) 相空间之间满足如下线性关系:

$$\begin{pmatrix} x_f \\ x'_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ x'_i \end{pmatrix} \quad (1)$$

其中 m_{ij} 为待测点与实际测量位置间传输系统的传输矩阵元素。由式 (1) 可得, 单粒子在水平方向的位置传输关系为

$$x_f = m_{11}x_i + m_{12}x'_i$$

在统计意义下, 束流的二阶矩由单粒子分布的统计平均定义。因此, 对上式两边平方并取统计平均, 可得下游位置处束流位置二阶矩与上游相空间二阶矩之间的关系:

$$\langle x_f x_f \rangle = m_{11}^2 \langle x_i^2 \rangle + 2m_{11}m_{12} \langle x_i x'_i \rangle + m_{12}^2 \langle x_i'^2 \rangle \quad (2)$$

显然, 仅依赖单一四极磁铁设置所获得的测量信息不足以确定上游相空间的二阶矩参数。为此, 需要通过多次改变四极磁铁的聚焦强度, 获得多组测量结果。将该过程写成矩阵形式, 可表示为

$$\begin{pmatrix} m_{11,1}^2 & 2m_{11,1}m_{12,1} & m_{12,1}^2 \\ m_{11,2}^2 & 2m_{11,2}m_{12,2} & m_{12,2}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{11,n}^2 & 2m_{11,n}m_{12,n} & m_{12,n}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle x_i x_i \rangle \\ \langle x_i x'_i \rangle \\ \langle x_i' x_i' \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle x x \rangle_{f_1} \\ \langle x x \rangle_{f_2} \\ \vdots \\ \langle x x \rangle_{f_n} \end{pmatrix} \quad (3)$$

可将测量原理简化为线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, 其中矩阵 \mathbf{A} 由不同四极磁铁聚焦强度下的传输矩阵元素构成, 向量 \mathbf{x} 表示上游束流的未知二阶矩, 而 \mathbf{b} 则对应于下游位置处测得的束流信息。

2 量化误差的两种方法

在横向相空间分布测量的研究中, 首先需要从理论层面确保测量原理的可行性和准确性。然而在实际测量过程中, 传输矩阵的不确定性、环境扰动、探测系统噪声等因素都会引入误差, 使得测量结果偏离束流的真实相空间分布。若将四极磁铁扫描原理简单表示为

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (4)$$

则由于机械误差或磁场误差, 系数矩阵 \mathbf{A} 会产生扰动 $\delta\mathbf{A}$; 测量端也不可避免会存在测量噪声 $\delta\mathbf{b}$ 。因此, 实际测量可表示为

$$(\mathbf{A} + \delta\mathbf{A})(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} + \delta\mathbf{b} \quad (5)$$

束流重构的精度高度依赖于矩阵 \mathbf{A} 的特性, 而测量次数往往有限, 这使得相空间的反推问题更加困难。因此, 需要系统地分析并量化不同误差源对测量结果的影响, 以优化测量方案、提升重构的可靠性。以下介绍两种常用的误差量化方法。

2.1 统计分析

将测量过程表示为

$$(\mathbf{A} + \delta\mathbf{A})(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} + \delta\mathbf{b}. \quad (6)$$

其中, $\delta\mathbf{A}$ 表示系数矩阵不确定性, 主要来源于如磁铁标定误差、几何安装误差、旋转角度偏差等, 通常体现为系统误差; $\delta\mathbf{b}$ 表示测量端扰动, 既可能来源于随机测量噪声, 也可能包含系统性偏差。

统计分析方法是指在测量端引入给定幅度与统计特性的误差扰动 $\delta\mathbf{b}$ (或 $\delta\mathbf{A}$), 多次求解扰动后的方程组, 得到一系列解 \mathbf{x}_i , 再对其进行统计分析, 从解的统计特性 (如均值、标准差等) 中评估反演结果对误差的敏感程度。

需要指出的是, 在误差传播计算中起决定作用的是扰动项的幅值与统计分布, 而非误差来源的类别。因此, 在已知 $\delta\mathbf{A}$ 与 $\delta\mathbf{b}$ 数值大小的前提下, 可统一通过统计采样方法分析其对 $\delta\mathbf{x}$ 的影响, 而无需对误差来源进行额外区分。此外, 磁铁的旋转误差属于系统误差的一种, 根据现有工程经验, 磁铁位置容差通常在 0.1–0.5 mm, 旋转误差一般在 0.1–0.5 mrad 量级^{[11][12]}。在本文讨论的参数范围内, 该数量级对应的传输矩阵扰动对统计离散性的贡献远小于随机测量误差, 因此本文统计分析暂不考虑磁铁的旋转误差带来的影响。

统计分析方法直观、可靠, 但计算量巨大。但若对每组磁铁参数对应的测量结果都进行统计采样, 其计算成本将极为庞大。此外, 此方法无法直接指导优化参数, 难以高效寻找误差最小的测量配置。

2.2 敏感度分析

另一种量化误差敏感度的重要方法是使用矩阵的条件数。条件数可以衡量矩阵对误差的敏感度，是评价测量配置优劣的重要指标^[13]。条件数定义为

$$\kappa(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = \frac{\sigma_{\max}(A)}{\sigma_{\min}(A)} \geq 1 \quad (7)$$

其中 $\sigma_{\max}(A)$ 和 $\sigma_{\min}(A)$ 分别为矩阵 A 的最大和最小非零奇异值。良好条件的矩阵其条件数应接近于 1。根据

$$(A + \delta A)(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}) = \mathbf{b} + \delta \mathbf{b}$$

可得到解相对误差的上界：

$$\frac{\|\delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \frac{\kappa(A)}{1 - \kappa(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} \right) \quad (8)$$

该不等式表明，矩阵 A 的条件数越小（越接近 1），误差敏感度越低，测量结果越可靠；反之误差对测量的影响越大^[14]。

使用条件数衡量误差敏感度方法更为直观，无需显式计算误差值，计算量小，可直接用于优化测量配置。

3 四极磁铁扫描中的最小化条件数研究

由于条件数 $\kappa(A)$ 可用于量化线性方程组解对误差的敏感程度，横向相空间扫描结果的误差最小化问题可等价地表述为：如何合理选择四极磁铁扫描参数，使得线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 中矩阵 A 的条件数 $\kappa(A)$ 尽可能小。将条件数作为误差敏感度指标并应用于束流测量问题的思想，早在 GSI 的相关工作中已有体现^[15]。该文强调了磁铁参数矩阵具有较低条件数的重要性，但并未给出扫描参数的系统选取准则，而是通过穷举搜索的方式获取条件数较小的磁铁参数组合。

然而在实际应用中，使用穷举法在所有可能的扫描参数组合中搜索使 $\kappa(A)$ 最小的方案在计算上很多时候是不可行的。以 Triplet 束线为例，其中包含三组可调四极磁铁，若每个四极磁铁设置 10 组不同的磁场强度，则可形成 $10^3 = 1000$ 组不同的传输矩阵。若从中选取 4 组作为最终测量配置，其可能组合数为

$$C_{1000}^4 = \frac{1000!}{996! \times 4!} \approx 4.14 \times 10^{10}$$

对于包含更多磁铁组合和更多测量参数的扫描，该组合数将进一步呈指数级增长。因此，逐一构建所有可能的系数矩阵 A 并计算其条件数以进行筛选，不仅会导致极高的计算成本，同时因其可解释性差，缺乏明确的指导原则，难以为扫描参数的优化提供有效的解释和依据。

3.1 投影角度的引入

基于上述现状与问题，我们引入投影视角，旨在建立投影角度与条件数之间的关联，使低条件数的扫描参数能够在几何上直观呈现，从而更有效寻找参数。从投影的角度来看，四极磁铁参数的变化对应于对初始相空间沿不同方向的投影，并将其映射到束流剖面探测器的相空间分布上。因此，问题可以等价地转化为：哪些投影角度能够使系数矩阵 A 具有更低的条件数，从而提高重构结果的稳定性与准确性？

在 x 平面四极磁铁线性传输的投影角度如下图所示，初始位置 (i) 和末位置 (f) 相空间坐标之间的线性关系如式 (9) 所示。

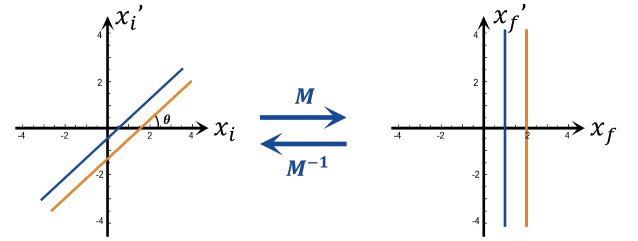


图 1 在 $x_f - x_f'$ 相空间的垂直条带经线性传输后转化为 $x_i - x_i'$ 相空间的斜条带，表面末位置处剖面从角度 θ 投影初始相空间分布。这里 x 和 x' 采用归一化的无量纲坐标。

$$\begin{pmatrix} x_f \\ x_f' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ x_i' \end{pmatrix} \quad (9)$$

因此，在 $x_f - x_f'$ 相空间中，直线 $x_f = a_0$ ，其中 a_0 变为：

$$m_{11}x_i + m_{12}x_i' = a_0 \quad (10)$$

其斜率由下式给出

$$\tan \theta = -\frac{m_{11}}{m_{12}} \quad (11)$$

因此， θ 对应于初始相空间上的投影角。图 1 辅助说明了这一观点。

3.2 投影角度均匀化

接下来需要回答的问题是如何选择最佳的投影角度。从对称性与几何视角出发，磁铁的参数设置理应覆盖较为均匀的角度分布，以避免信息冗余或方向偏置。为了进一步揭示投影角度与条件数之间的直接关系，我们通过模拟分别构建了“窄分布”“中等分布”和“宽分布”三类角度范围，如图 2 所示，并在相同随机噪声条件下对其测量结果进行对比分析。

在测量端加入扰动后，我们对重构得到的初始位置处信息进行多次求解，统计其发射度均值与标准差，以考察其与条件数之间的关系。结果表明，投影角度分布

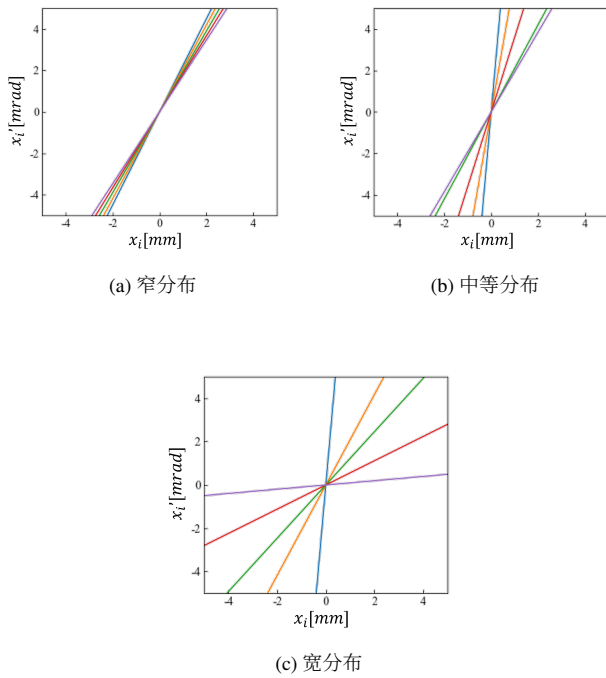


图 2 不同磁铁参数对应的不同投影角度分布图

越分散，矩阵的条件数越小，求解的发射度标准差越小，测量精度随之提高，对误差的敏感度也显著降低。

表 1 不同角度分布的条件数、发射度均值及发射度标准差

	窄分布	中等分布	宽分布
$\kappa(A)$	1030.51	122.62	40.53
发射度均值 ϵ_x	0.7499	0.7500	0.7500
发射度标准差	0.0463	0.0124	0.0037

将结果绘制在同一张图中可以更加直观地观察不同角度分布下发射度标准差的情况。可以看到，当投影角度分布更为分散时，其对应的发射度在图中的分布明显更加集中，标准差更小。这与预期相符，进一步验证了均匀化角度能够有效降低测量对误差的敏感度，提高重构结果的稳定性。

4 四极磁铁扫描中的最小化条件数研究

在前文中，我们对测量矩阵条件数与投影角度分布之间的关系提出了假设，并验证了投影角度均匀化能够有效降低测量过程对误差的敏感度。基于该结论的合理性，进一步尝试将这一发现推广并应用至一般的相空间测量中，旨在四极磁铁扫描过程中构造一种能够使等效投影角度尽可能均匀分布的测量策略。为此，下面首先在理想情形下讨论投影角度均匀分布时所对应的条件数性质。

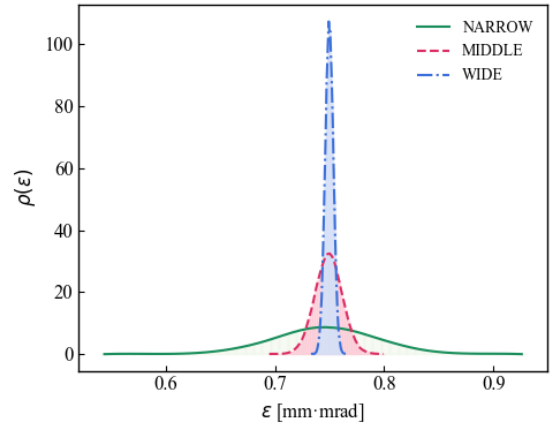


图 3 三种角度分布下的发射度分布对比图

4.1 角度均匀分布时条件数定值证明

在理想情况下，假设存在一个圆形的二维质量分布。此时，从几何投影的角度来看，当投影角度在 $[0, \pi)$ 区间内均匀分布时，能够获取最多的有效信息，矩阵 A 也具有更低的条件数。相应的测量关系可写为式(12)：

$$A \cdot \begin{pmatrix} \langle xx \rangle \\ \langle xy \rangle \\ \langle yy \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle u(\theta_1)u(\theta_1) \rangle \\ \langle u(\theta_2)u(\theta_2) \rangle \\ \vdots \\ \langle u(\theta_n)u(\theta_n) \rangle \end{pmatrix} \quad (12)$$

矩阵 A 表示为：

$$A = \begin{pmatrix} \cos^2(\theta_1) & 2 \sin(\theta_1) \cos(\theta_1) & \sin^2(\theta_1) \\ \cos^2(\theta_2) & 2 \sin(\theta_2) \cos(\theta_2) & \sin^2(\theta_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos^2(\theta_n) & 2 \sin(\theta_n) \cos(\theta_n) & \sin^2(\theta_n) \end{pmatrix} \quad (13)$$

其中 $\theta_j = \phi + \frac{j\pi}{n}$ ， $u_j = x \cos \theta_j + y \sin \theta_j$ ，则当 $n \geq 3$ 时，矩阵 A 的条件数为

$$\kappa(A) = \sqrt{2}$$

由于良好条件的矩阵其条件数应接近于 1，该结果表明，在球束假设下，均匀分布的投影角度对应的测量配置具有较低的误差敏感度，从而能够获得更为稳定和可靠的重构结果。该假设下矩阵 A 条件数为 $\sqrt{2}$ 的具体证明过程如下。

首先，条件数的计算方式为矩阵两奇异值之比，即 $\kappa(A) = \frac{\sigma_1}{\sigma_3}$ ，SVD 分解矩阵 A 得，

$$A = U \Sigma V^T$$

则可得

$$A^T A = V \Sigma^T \Sigma V^T$$

因此可知，矩阵 $A^T A$ 的特征值为矩阵 A 奇异值的平方，

则条件数的计算方式可写作:

$$\kappa(A) = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(A^T A)}{\lambda_{\min}(A^T A)}} \quad (14)$$

接下来计算矩阵 $A^T A$ 的各元素值, 并命名矩阵 $A^T A$ 为 B 矩阵, 矩阵 B 是一个 3×3 的对称方阵, 因此只需计算 6 个元素。首先, 利用二倍角公式将(13)矩阵中的各元素表示为:

$$\begin{aligned} A_{j1} &= \cos^2\left(\phi + \frac{j\pi}{n}\right) = \frac{1}{2} \left[1 + \cos\left(2\phi + \frac{2j\pi}{n}\right) \right] \\ A_{j2} &= 2 \sin\left(\phi + \frac{j\pi}{n}\right) \cos\left(\phi + \frac{j\pi}{n}\right) = \sin\left(2\phi + \frac{2j\pi}{n}\right) \\ A_{j3} &= \sin^2\left(\phi + \frac{j\pi}{n}\right) = \frac{1}{2} \left[1 - \cos\left(2\phi + \frac{2j\pi}{n}\right) \right] \end{aligned}$$

则矩阵 B 中的元素可以简化表示为:

$$\begin{aligned} B_{11} &\equiv a_+ = \sum_{j=1}^n (A_{j1})^2 & B_{12} &\equiv d_+ = \sum_{j=1}^n A_{j1} A_{j2} \\ B_{13} &= \sum_{j=1}^n A_{j1} A_{j3} & B_{22} &= \sum_{j=1}^n (A_{j2})^2 \\ B_{23} &\equiv d_- = \sum_{j=1}^n A_{j2} A_{j3} & B_{33} &\equiv a_- = \sum_{j=1}^n (A_{j3})^2 \end{aligned}$$

分别计算值 a_{\pm} 、 d_{\pm} 、 B_{13} 及 B_{22} :

$$\begin{aligned} a_{\pm} &= \frac{1}{4} \sum_{j=1}^n \left[1 \pm \cos\left(2\phi + \frac{2j\pi}{n}\right) \right]^2 \\ &= \frac{1}{4} \sum_{j=1}^n \left[1 \pm 2 \cos\left(2\phi + \frac{2j\pi}{n}\right) + \cos^2\left(2\phi + \frac{2j\pi}{n}\right) \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[n \pm 0 + \frac{n}{2} \right] = \frac{3n}{8} \\ d_{\pm} &= \frac{1}{4} \sum_{j=1}^n \left[1 \pm \cos\left(2\phi + \frac{2j\pi}{n}\right) \right] \sin\left(2\phi + \frac{2j\pi}{n}\right) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{j=1}^n \left[\sin\left(2\phi + \frac{2j\pi}{n}\right) \pm \frac{1}{2} \sin\left(4\phi + \frac{4j\pi}{n}\right) \right] \\ &= \frac{1}{4} [0 \pm 0] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{13} &= \sum_{j=1}^n A_{j1} A_{j3} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{j=1}^n \left[1 + \cos\left(2\phi + \frac{2j\pi}{n}\right) \right] \left[1 - \cos\left(2\phi + \frac{2j\pi}{n}\right) \right] \\ &= \frac{1}{4} \sum_{j=1}^n \left[1 - \cos^2\left(2\phi + \frac{2j\pi}{n}\right) \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[n - \frac{n}{2} \right] = \frac{n}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{22} &= \sum_{j=1}^n (A_{j2})^2 \\ &= \sum_{j=1}^n \sin^2\left(2\phi + \frac{2j\pi}{n}\right) = \frac{n}{2} \end{aligned}$$

则矩阵 B , 即矩阵 $A^T A$ 可表示为:

$$A^T A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix} \quad (15)$$

其中, $a = 3n/8, b = n/8, c = n/2$, 则由此可以计算矩阵 $A^T A$ 的特征值:

$$(a - \lambda)^2(c - \lambda) - b^2(c - \lambda) = 0$$

可解得:

$$(a - \lambda)^2 - b^2 = 0 \quad \text{or} \quad (c - \lambda) = 0$$

$$\lambda = a \pm b \quad \text{or} \quad \lambda = c$$

故矩阵 $A^T A$ 的三个特征值分别为 $n/2, n/2, n/4$, 则矩阵 A 的条件数为:

$$\kappa(A) = \frac{\sigma_1(A)}{\sigma_3(A)} = \sqrt{\frac{n/2}{n/4}} = \sqrt{2}$$

由此证得当投影角度为均匀选取时, 且满足角度值至少为三个时, 矩阵 A 的条件数为 $\sqrt{2}$ 。

4.2 多角度投影的矩阵表述与条件数优化原理

4.2.1 椭圆坐标转换

先前的理论分析与推导均基于束流在真实空间中呈球分布的理想假设。然而在束流相空间中, 束流分布通常并非理想球形, 而更接近于具有各向异性特征的椭圆。在此情形下, 若仍直接在原坐标系中选取投影角度, 将难以保证角度分布的均匀性。

为此, 在二维空间中, 有必要先通过坐标变换将椭圆映射为单位圆, 从而使变换后的坐标空间中角度选取有明确的目标。

在二维空间中, 一个以原点为中心的椭圆可以写作:

$$\gamma x_1^2 + 2\alpha x_1 x_2 + \beta x_2^2 = 1$$

可以用二次型形式可写作:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = 1$$

其中 $\mathbf{x} = (x_1 \ x_2)^T$ 是坐标向量, \mathbf{A} 为正定对称矩阵:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \gamma & \alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

则目标是构造一个线性坐标变换 $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{y}$, 使得在新坐标系 $\mathbf{y} = (y_1 \ y_2)^T$ 中, 方程变成标准的单位圆方程:

$$y_1^2 + y_2^2 = 1$$

将 $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{y}$ 代入原椭圆方程:

$$(\mathbf{P}\mathbf{y})^T \mathbf{A} (\mathbf{P}\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T (\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P}) \mathbf{y} = 1$$

为了让新方程成为 $y_1^2 + y_2^2 = 1$, 即 $\mathbf{y}^T \mathbf{I} \mathbf{y} = 1$, 需满足:

$$\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P} = \mathbf{I}$$

由于矩阵 \mathbf{A} 为对称正定矩阵, 其可进行特征值分解:

$$\begin{pmatrix} \gamma & \alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} = \mathbf{R} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \mathbf{R}^T$$

其中 \mathbf{R} 为正交矩阵, 其列向量为 \mathbf{A} 的归一化特征向量, 对应椭圆主轴方向; $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ 是 \mathbf{A} 的特征值。

据此, 可构造坐标变换矩阵

$$\mathbf{P} = \mathbf{R} \mathbf{A}^{-1/2}$$

其中

$$\mathbf{A}^{-1/2} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix}$$

从而满足 $\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P} = \mathbf{I}$ 。对应的正向与反向坐标变换关系分别为

$$\mathbf{x} = \mathbf{R} \mathbf{A}^{-1/2} \mathbf{y}, \mathbf{y} = \mathbf{A}^{1/2} \mathbf{R}^T \mathbf{x}$$

在束流相空间表述中, $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$ 向量为坐标转换前的初始相空间坐标, $\mathbf{u} - \mathbf{u}'$ 向量为坐标转换后的初始相空间坐标, 则根据上述坐标转换的结论, 可写出转换过程:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{u}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix} \mathbf{R}^T \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}' \end{pmatrix} \quad (16)$$

设在椭圆坐标系下未经过坐标转换的重构点和测量点之间的传输矩阵为 \mathbf{M} , 则

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}' \end{pmatrix}_f = \mathbf{M} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}' \end{pmatrix}_i \quad (17)$$

经过坐标转换的传输矩阵为 \mathbf{M}^* , 经过传输矩阵 \mathbf{M}^* 的传输后可表示为

$$\mathbf{M}^* \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{u}' \end{pmatrix}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}' \end{pmatrix}_f \quad (18)$$

将上述坐标变换代入, 可得在单位圆坐标系下对应的等效传输矩阵 \mathbf{M}^* :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}' \end{pmatrix}_f = \mathbf{M} \mathbf{R} \mathbf{A}^{-1/2} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{u}' \end{pmatrix}_i \equiv \mathbf{M}^* \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{u}' \end{pmatrix}_i \quad (19)$$

即

$$\mathbf{M}^* = \mathbf{M} \mathbf{R} \mathbf{A}^{-1/2}. \quad (20)$$

在后续分析中, 所有投影角度的选取与条件数优化均在该等效圆坐标系中进行, 从而保证不同角度在几何意义上的均匀性。

4.2.2 误差最小化目标

基于坐标转换工具, 从矩阵 \mathbf{A} 角度出发, 可以对四极磁铁扫描中条件数 $\kappa(\mathbf{A})$ 的最小化目标进行更为清晰的分解。总体而言, 最小化目标主要体现在两个含义不同的方面。

一方面, 投影角度 θ_j 的选取应尽可能覆盖相空间的各个方向, 即不同测量对应的投影角度在相空间中应具有良好的均匀性。若投影角度过于集中, 则会导致矩阵 \mathbf{A} 的行向量在几何上接近线性相关, 从而显著放大测量误差在反推过程中的传播。

另一方面, 需要指出的是, 由于四极磁铁的传输作用, 不同测量条件下的投射不仅改变方向, 还可能对相空间在投影方向上的分布产生拉伸或收缩。即传输矩阵中 $m_{11_j}^2 + m_{12_j}^2$ 的值不总为 1。该效应可通过伸缩因子 $a_j = \sqrt{m_{11_j}^2 + m_{12_j}^2}$ 来刻画。若不同测量条件下的 a_j 差异过大, 则即使投射角度分布均匀, 矩阵 \mathbf{A} 各行在模长上的不均衡同样会恶化条件数, 使得系统对噪声更加敏感。因此, 在保证角度覆盖充分的前提下, 应尽可能选取幅值相近的伸缩因子, 使不同测量条件对应的向量尽可能分布在同一圆周附近。

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 \cos^2(\theta_1) & 2a_1 \sin(\theta_1) \cos(\theta_1) & a_1 \sin^2(\theta_1) \\ a_2 \cos^2(\theta_2) & 2a_2 \sin(\theta_2) \cos(\theta_2) & a_2 \sin^2(\theta_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n \cos^2(\theta_n) & 2a_n \sin(\theta_n) \cos(\theta_n) & a_n \sin^2(\theta_n) \end{pmatrix} \quad (21)$$

其中

$$\theta_j = \arctan \frac{-m_{11_j}}{m_{12_j}}$$

$$a_j = \sqrt{m_{11_j}^2 + m_{12_j}^2}$$

为了便于对角度分布均匀性的量化描述, 可将 θ_j 表示为理想均匀分布与小扰动之和:

$$\theta_j = \phi + \frac{j\pi}{n} + \psi_j \quad (22)$$

其中 ϕ 表示初始角度偏置, $\frac{j\pi}{n}$ 对应于理想情况下在相空间中的均匀角度采样, 而 ψ_j 则刻画选取的角度与理想角度之间的偏差。显然, 当 ψ_j 越小, 投影角度分布越接近理想均匀状态。

另一方面, 为了描述伸缩因子 a_j 的离散程度, 引入无量纲指标

$$t = \frac{\max[a_j]}{\min[a_j]} - 1 \quad (23)$$

该指标直接反映了不同测量条件下相空间伸缩程度的相对差异。当 t 趋于 0 时, 说明各测量对应的 a_j 基本一致, 矩阵 \mathbf{A} 的行向量在尺度上更加均衡, 有利于降低系统的条件数。

综上所述, 在四极磁铁扫描的参数设计中, 最小化条件数 $\kappa(\mathbf{A})$ 的问题可自然转化为对两个指标的联合优化: 一是尽量减小角度扰动项 ψ_j , 以保证投影角度在相空间中的均匀覆盖; 二是尽量减小伸缩因子离散度指标 t , 以降低不同测量条件下尺度不一致带来的误差放大效应。该结论为后续扫描方案的优化设计提供了直观且可量化的判据。

5 结论

本文关注四极磁铁扫描法在横向相空间测量中潜在的误差敏感性问题, 从线性代数与几何投影的角度, 对误差传播机制及测量参数优化进行了系统研究。将四极磁铁扫描过程表述为线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, 并以矩阵条件数作为量化误差敏感度的核心指标, 建立了扫描参数选择与重构稳定性之间的定量联系。

通过引入相空间投影角度的几何解释, 本文揭示了不同四极磁铁设置本质上对应于对初始相空间在不同方向上的投影测量。研究表明, 当投影角度分布过于集中时, 测量矩阵 \mathbf{A} 的行向量在几何上趋于相关, 条件数显著增大, 从而放大测量端噪声与传输误差对重构结果的影响。相反, 当投影角度在相空间中均匀覆盖时, 矩阵结构更加均衡, 误差敏感度显著降低。

在理论分析中, 针对标准投影矩阵形式, 本文严格证明了当投影角度均匀选取且角度数不少于三个时, 测量矩阵 \mathbf{A} 的条件数恒定为 $\sqrt{2}$, 该结果为扫描参数的最优设计提供了明确的解析判据。数值模拟结果进一步验证了该结论: 在相同噪声条件下, 角度分布越均匀, 对应的条件数越小, 反演得到的发射度标准差越低, 测量结果的稳定性和鲁棒性显著提升。

针对实际束流分布通常呈椭球而非理想球形的情况, 本文引入了基于特征值分解的椭圆到圆的坐标变换方法, 将角度选择问题统一到具有明确几何意义的等效圆坐标系中, 从而保证投影角度均匀性的普适性。在此基础上, 将条件数最小化目标分解为两个可量化的优化指标: 投影角度扰动的最小化以及不同测量条件下相空间伸缩因子离散度的抑制, 为实际四极磁铁扫描方案的设计提供了直观而有效的指导原则。

综上所述, 本文提出了一种基于几何投影与条件数分析的四极磁铁扫描误差最小化方法, 为横向相空间测量中扫描参数的优化提供了清晰的理论依据和可操作的判据。该方法不依赖于具体的误差模型, 具有良好的普适性, 可为高精度束流诊断与相空间重构提供参考。未来可将该方法拓展至四维相空间测量场景, 以实现高维相空间重构中的误差最小化。

参考文献

- [1] FORCK P. Lecture notes on beam instrumentation and diagnostics[R]. Darmstadt, Germany: Gesellschaft für Schwerionenforschung (GSI), Joint University Accelerator School, 2025.
- [2] YU L, SUI Y, ZHAO J, ZHU D. Design and application of double-slit emittance meter for C-ADS proton beams[C]//Proceedings of the 7th International Particle Accelerator Conference. 2016: MOPMB034. DOI: 10.18429/JACoW-IPAC2016-MOPMB034.
- [3] POGGE J. SNS emittance scanner: increasing sensitivity and performance through noise mitigation, design, implementation and results [C]. AIP Conf. Proc., 2006, 868. DOI: 10.1063/1.2401433.
- [4] ZHAO Y Y, ZHAO H W, SUN L T, YANG Y, WANG Y, CAO Y. Design of a 4D emittance measurement device for extracted beams from high charge state ECR ion sources[J]. Nucl. Phys. Rev., 2013, 30(4): 413-419. (in Chinese)
(赵阳, 赵红卫, 孙良亭, 杨尧, 王云, 曹云. 高电荷态 ECR 离子源引出束流 4D 发射度测量仪设计[J]. 原子核物理评论, 2013, 30(4): 413-419. DOI: 10.11804/NuclPhysRev.30.04.413.)
- [5] ALEKSANDROV A V, CATHEY B L, COUSINEAU S M, ZHUKOV A P. 6D beam measurement, challenges and possibilities [C]//Proc. IPAC'18. Vancouver, BC, Canada, 2018: 2890-2895. DOI: 10.18429/JACoW-IPAC2018-THXGBE1.
- [6] PFISTER J, NÖRENBERG R, RATZINGER U. Commissioning of the HITRAP decelerator using a single-shot pepper pot emittance meter[C]. 2008.
- [7] XIAO C, GROENING L, GERHARD P, MAIER M, MICKAT S, et al. Measurement of the transverse four-dimensional beam rms-emittance of an intense uranium beam at 11.4 MeV/u[J]. Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A, 2016, 820: 14-22. DOI: 10.1016/j.nima.2016.02.090.
- [8] PRATE, AIBA M. Four-dimensional transverse beam matrix measurement using the multiple-quadrupole scan technique[J]. Phys. Rev. ST Accel. Beams, 2014, 17(5): 052801. DOI: 10.1103/PhysRevSTAB.17.052801.
- [9] XIA H Q. Principles of beam transport[M]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 1991. (in Chinese) (夏慧琴. 束流传输原理. 西安: 西安交通大学出版社 [M], 1991)

- [10] WONG C Y, LUND S M. Error minimization in transverse phase-space measurements using quadrupole and solenoid scans[C]//Proc. NAPAC'19. Geneva, Switzerland: JACoW Publishing, 2019: 971–974. DOI: [10.18429/JACoW-NAPAC2019-THZBB6](https://doi.org/10.18429/JACoW-NAPAC2019-THZBB6).
- [11] MURPHY C T. Survey and alignment at Fermilab[EB/OL]. Batavia, IL, USA: Fermilab. <https://www.slac.stanford.edu/econf/C9910183/papers/006.PDF>.
- [12] XU J. arXiv: 2512.15022, 2025. <https://arxiv.org/abs/2512.15022>.
- [13] DEMMEL J W. Applied numerical linear algebra[M]. Philadelphia: SIAM, 1997.
- [14] TREFETHEN L N, BAU D III. Numerical linear algebra[M]. Philadelphia: SIAM, 1997.
- [15] XIAO C, MAIER M, DU X N, GERHARD P, GROENING L, MICKAT S, et al. Rotating system for four-dimensional transverse rms-emittance measurements[J]. Phys. Rev. Accel. Beams, 2016, 19(7): 072802. DOI: [10.1103/PhysRevAccelBeams.19.072802](https://doi.org/10.1103/PhysRevAccelBeams.19.072802).

Error Minimization in Transverse Phase-Space Measurements Using Quadrupole Scan Based on Projection-Angle Uniformization

Binghui Ma^{1,2}, Jonathan Wong^{1,2,3}, Yu Du^{1,2}, Liwen Liu^{1,2}

(1. Institute of Modern Physics, Chinese Academy of Sciences, Lanzhou 730000, China;

2. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China;

3. Advanced Energy Science and Technology Guangdong Laboratory, Huizhou 516000, Guangdong, China)

Abstract: In beam diagnostics, accurate determination of phase-space distributions plays a crucial role in beam prediction, control, and the understanding of beam dynamics. Among various techniques, quadrupole scan is the most widely used method for transverse phase-space reconstruction. However, in practical applications, this method is susceptible to various perturbations, including measurement noise, magnetic field errors, element nonlinearities, and installation uncertainties. When the scan parameters are improperly chosen, the impact of these perturbations on the reconstructed results can be significantly amplified, thereby affecting subsequent beam control and physical interpretation. To address this issue, this study systematically analyzes the influence of errors on the measurement process from the perspectives of linear algebra and geometric projection, and proposes a parameter optimization method capable of effectively quantifying error sensitivity. By comparing the error amplification characteristics under different focusing conditions, a criterion for parameter selection that minimizes reconstruction errors is established, leading to a more precise and accurate reconstruction of the initial phase-space distribution.

Key words: quadrupole scan; error minimization; condition number; beam diagnostics; transverse phase space

ChinaXiv:202603.00144v1

Received date: 19 Mar. 2026; **Revised date:** 19 Mar. 2026

Foundation item: National Natural Science Foundation of China (Grant No.U22A20261)

Corresponding author: Jonathan Wong, E-mail: wong@impcas.ac.cn